Lógica y Computabilidad - Segundo Parcial

Primer Cuatrimestre de 2020

Nombre y Apellido	L.U.	Carrera

1	2	3	Nota

Ejercicio 1.
Sea $\Gamma \subseteq$ **Form** un conjunto satisfacible de fóormulas de la lógica proposicional.

1. Probar que si existe una única valuación que satisface a Γ entonces $\Gamma \models \alpha$ o $\Gamma \models \neg\alpha$ para toda fórmula proposicional α.

2. Si $\Gamma \models \alpha$ o $\Gamma \models \neg\alpha$ para toda fórmula α, ¿es cierto que existe una única valuación que satisface a Γ?

Solucion 1.

1. Notemos que para toda fórmula α, dada una valuación v, por las definiciones vistas en las clases teóricas, sólo pueden pasar dos cosas: $v \models \alpha$ o bien $v \not\models \alpha$.

   Sea entonces Γ tal que v es la única valuación que hace verdad a todas las fórmulas de Γ. Sea $\alpha \in$ **Form**, podemos decir, entonces, que $v \models \alpha$ o bien que $v \not\models \alpha$. Veamos los dos casos.

   a. Si $v \models \alpha$, como sabemos por definición que $\Gamma \models \alpha$, se deduce que toda valuación que hace verdad a todas las fórmulas de Γ también hará verdad a α. En este caso solamente hay una valuación (v) tal que $v \models \Gamma$ así que es trivial ver que como $v \models \alpha$ va a suceder que $\Gamma \models \alpha$.

   b. Si $v \not\models \alpha$, entonces $v \models \neg\alpha$ y, usando el razonamiento análogo al caso anterior, se puede ver que $\Gamma \models \neg\alpha$.

   Alternativamente podríamos ver que el conjunto de las consecuencias semánticas de Γ es maximal consistente. Es decir, que el conjunto $\{\alpha : v \models \alpha\}$ es maximal consistente, lo que implica que para toda fórmula β o bien $\beta \in \{\alpha : v \models \alpha\}$ o bien $\neg\beta \in \{\alpha : v \models \alpha\}$.

   <u>**Demostrando por el absurdo:**</u>

   Sea Γ un conjunto satisfacible de fórmulas de la lógica proposicional. Sean v la única valuación que satisface a Γ y α una fórmula de la lógica proposicional.

   Supongamos que Γ no es consecuencia semántica de α y Γ tampoco es consecuencia semántica de $\neg\alpha$. Esto quiere decir que, por definición de consecuencia semántica, que al evaluar a α en la valuación v, el resultado es 0.

   De manera análoga, también quiere decir que evalular $\neg\alpha$ en v, da como resultado 0. Es decir: $v(\alpha) = v(\neg\alpha) = 0$. Esta claro que esto es absurdo.

   La valuación de una fórmula negada debe dar el resultado opuesto a la valuación de dicha fórmula no negada.

   Ahora supongamos que Γ si es consecuencia semántica de α y Γ también es consecuencia semántica de $\neg\alpha$. El desarrollo es análogo al párrafo anterior. Por definición de consecuencia semántica, esto significa que
   $v(\alpha) = v(\neg\alpha) = 1$. Absurdo.

   Entonces vimos que Γ no puede ser consecuencia semántica de α y $\neg\alpha$ simultáneamente, como tampoco puede ocurrir que Γ no sea consecuencia semántica de ninguna de las dos fórmulas recién mencionadas.

   Queda demostrado que si existe una única valuación que satisface a Γ, entonoces Γ es consecuencia semántica de α o Γ es consecuencia semántica de $\neg\alpha$, para todo $\alpha \in$ **Form**.

2. Γ es consistente por hipótesis. Como sabemos, también por hipótesis, que para toda fórmula α, sucede que $\Gamma \models \alpha$ o que $\Gamma \models \neg\alpha$ vamos a considerar que sucede al tomar α como cualquiera de las variables proposicionales $(p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots)$.

   Sabemos que para cada p_i, sucede que Γ lo fuerza o no lo fuerza. Es decir, que para toda valuación v que satisfaga a Γ, $v(p_i)$ va a ser un número fijo (0 o 1).

   Toda valuación que haga verdad a Γ entonces siempre se va a cumplir que para toda variable proposicional va a tener un valor fijo. Este valor va a depender de si para esa variable en particular, $\Gamma \models\ p_i$ o que $\Gamma \models \neg p_i$.

   Si hubieran 2 valuaciones w, v tal que las dos hicieran real a Γ, entonces, como son diferentes, existe p_j tal que $w(p_j) \neq v(p_j)$, pero esto es absurdo! Porque sabemos que, para toda valuación que cumple que hace real a todas las fórmulas de Γ, va a suceder que la valuación "mapea" el valor de p_j a un número fijo. No pueden entonces dos valuaciones diferir en un punto.

Ejercicio 2.
Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad y un símbolo de función binaria $d_{\mathcal{I}}$. Consideremos la $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{I} = (\mathbb{R}, d_{\mathcal{I}})$, donde la interpretación del símbolo $d_{\mathcal{I}}$ es la función distancia usual $d_{\mathcal{I}}(r,s) = |r-s|$.

(a) Probar que 0 es distinguible.

(b) Probar que los siguientes conjuntos son expresables

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \neq y \text{ y } z \text{ es el promedio de } x \text{ e } y\}$$
$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \neq y \text{ y } z \text{ es la mitad de la distancia entre } x \text{ e } y\}$$

Solucion 2.

(a) Un elemento e del universo es distinguible si exsite una $\mathcal{I}$-fórmula φ con una única variable libre x tal que $\mathcal{I} \models \varphi[v]$ si y sólo si $v(x) = e$.

Sea, entonces, φ_x definida de la siguiente manera

$$\varphi_x : (\forall y)(d_{\mathcal{I}}(y,y) = x)$$

Esta fórmula tiene una sola variable libre (x), y usa solamente elementos del lenguaje (el simbolo $d_{\mathcal{I}}$ y el símbolo de la igualdad).

Como la interpretación de $d_{\mathcal{I}}$ es la distancia, acá estamos diciendo que

"para todo elemento del universo (para todo real), se cumple que la distancia consigo mismo es x"

La única valuación que podría hacer verdad esto es aquella que mande a x al 0, puesto que el 0 es el único número que puede resultar al calcular la distancia entre un número y si mismo

Luego, el 0 es distinguible.

(b) Dada una interpretación $\mathcal{I}$, una relación R es expresable cuando si existe una n-fórmula de n variables libres φ tal que para toda valuación v, $I \models \varphi[v]$ si y sólo si la valuación manda a las variables libres $x_1, \ldots, x_n$ a un lugar tal que $v(x_1) \ldots, v(x_n)$ pertenece a la relación R.

- **Para el conjunto A:**

Busquemos primero un φ con 3 variables libres tal que $I \models \varphi[v]$ cuando $v(x_1) \neq v(x_2)$ y, además, $v(x_3)$ es el promedio entre ambos.

Sea $\varphi(x,y,z) = \neg(x = y) \wedge (d_{\mathcal{I}}(x,z) = d_{\mathcal{I}}(z,y))$

De nuevo, por propiedades de los números reales, sabemos que el único número que cumple que se encuentra a la misma distancia entre otros 2 es el promedio entre ellos. La parte a la derecha de la fórmula expresa justamente esto. Como sabemos que la interpretación de $d_{\mathcal{I}}$ es la distancia, esta parte de la fórmula se cumplirá solamente cuando una valuación v asocie el valor de z con el valor promedio entre x e y.

La parte de la izquierda de la valuación se encarga de asegurar que los valores x e y no son el mismo. De nuevo, una valuación va a hacer que se cumpla esta parte de la fórmula cuando los valores del universo asignados a x e y no sean el mismo.

En resumen, una valuación hace verdad a esa fórmula cuando cumple que los valores x e y son distintos y el de z es el promedio entre ambos. Encontramos la fórmula entonces que me asegura que esa relación es expresable.

- **Para el conjunto B:**

Un número real cumple que es la mitad de distancia entre otros dos cuando se encuentra a la misma distancia entre el 0 y la distancia entre los otros dos números.

Esto de nuevo es una propiedad de los reales, "dividir por dos" a un número es equivalente a acercar a ese número al 0 de forma tal que se encuentre a la misma distancia del 0 que del número.

Como ya sabemos que el 0 es distinguible, podemos usar esa fórmula ahora. Sea

$$\phi(x,y,z) = \neg(x = y) \wedge ((\forall t)(\varphi_0(t) \rightarrow (d_{\mathcal{I}}(z,t) = d_{\mathcal{I}}(z, d_{\mathcal{I}}(x,y)))$$

Si tomamos $\varphi_0(x)$ como la fórmula del punto anterior, lo que se está haciendo acá es que dada la estructura I, una valuación v va a cumplir que hace real a ϕ cuando esta v cumple que:

- $v(x) \neq v(y)$.

- Para toda t que cumpla la fórmula que distingue a 0 (sólo el $t = 0$ cumplirá ésto) la distancia entre z y ese t va a ser igual a la distancia entre z y la distancia entre x e y.

Habiendo dicho todo esto, y habiendo explicado porque en los reales esto tiene sentido, queda demostrado que es expresable.

Otra manera de expresar al conjunto B consiste en definir

$$\psi = \neg(x = y) \wedge ((\exists w)(A(x, y, w) \wedge z = d(w, x)))$$

Esta fórmula, en lenguaje coloquial se traduce a

"x e y son distintos y z es igual a la distancia que hay entre el promedio de x,y con x."

Por lo desarrollado en los párrafos anteriores está claro que z es la mitad de la distancia.

Ejercicio 3.
Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad, con un símbolo de constante 0 y un símbolo de función unaria f. Dada una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M}$, decimos que f tiene soporte finito en $\mathcal{M}$ si el conjunto

$$Supp(\mathcal{M}) = \{x : f_{\mathcal{M}}(x) \neq 0_{\mathcal{M}}\} \text{ es finito.}$$

Demuestre que no existe una sentencia φ tal que para toda estructura $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \models \varphi$ si y sólo si f tiene soporte finito en $\mathcal{M}$.

Solucion 3.
Sabemos que si φ pudiera ser expresado, su negación ($Supp(\mathcal{M}) = \{x : f_{\mathcal{M}}(x) \neq 0_{\mathcal{M}}\}$ es infinito) también debería serlo.

Consideremos el conjunto de fórmulas

$$\phi_i = (\exists x_1, \ldots, x_i)(todosDistintos(x_1, \ldots, x_i)) \wedge \left(\bigwedge_{j=1}^{i} f_{\mathcal{M}}(x_j) \neq 0_{\mathcal{M}} \right)$$

Sea $\Gamma = \{\phi_i : \forall i \in \mathbb{N}\}$, entonces se puede ver que una $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M}$ hace verdad a todas las fórmulas de Γ cuando el universo $\mathcal{M}$ tiene infinitos puntos x tales que $f_{\mathcal{M}} \neq 0_{\mathcal{M}}$ (notar que todas las formulas ϕ_i no tienen variables libres por lo que las valuaciones se vuelven irrelevantes).

Entonces $\mathcal{M} \models \Gamma$ cuando hay infinitos putos en su universo tales que $f(x)$ es distinto a 0. Entonces podemos decir que $\mathcal{M} \models \Gamma$ cuando $\mathcal{M} \models \neg\varphi$. En otras palabras, $\Gamma \models \neg\varphi$.

Luego, por el Teorema de Compacidad, existe $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ finito tal que $\Gamma_1 \models \neg\varphi$.

Como Γ_1 es finito entonces está contenido en algún $\Gamma_0 = \{\phi_j : 1 \leq j \leq k\}$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Este Γ_0 también cumple que fuerza a $\neg\varphi$ (si una estructura hace verdaderas a las fórmulas de un conjunto, también va a hacer verdaderas a las fórmulas de un subconjunto del mismo).

Entonces sabemos que $\{\phi_j : 1 \leq j \leq k\} \models \neg\varphi$; es decir, a partir de

"existen k elementos distintos entre sí tales que al aplicarles la función el resultado es distinto de 0."

se puede deducir que

"existen infinitos elementos distintos entre sí tales que al aplicarles la función el resultado es distinto de 0."

Claramente, esto es absurdo.

Un ejemplo se tiene al definir una estructura $\mathcal{M}$ con un universo igual a los naturales, con símbolo de constante 0 y donde $f_{\mathcal{M}}$ es una función que manda los primeros k naturales al 1 y todo el resto de los naturales al 0.

Veamos que $\mathcal{M} \models \Gamma_0$. Como Γ_0 tiene k fórmulas $\{\phi_1, \ldots, \phi_k\}$ donde cada una es un

"existen i elementos tales que la función los manda a un número distinto 0"

para $i \in \{1, \ldots, k\}$.

En particular $\mathcal{M}$ va a hacer real a cada una de estas fórmulas, ya que tiene exactamente k elementos distintos (los primeros k naturales) tales que $f_{\mathcal{M}}(i)$ es distinto a 0 (es 1). Pero entonces, como $\Gamma_0 \models \neg\varphi$, para toda $\mathcal{L}$-estructura que satisfaga Γ_0 debería satisfacer a $\neg\varphi$ (de nuevo, las valuaciones no son relevantes en estos casos). Esto no ocurre ya que $\neg\varphi$ es real cuando hay infinitos elementos en el universo de $\mathcal{M}$ tales que al aplicarles la función el resultado es

distinto a 0. Esto es un absurdo, ya que en $\mathcal{M}$ hay exactamente k valores tales que al aplicarles la función el resultado es distinto a 0.

Como el aburso provino de decir que φ era expresable se deduce que la sentencia φ no puede ser expresable.

Otro ejemplo se tiene al definir $\mathcal{M}$ el modelo formado por los enteros $\{0, 1, 2, \ldots, k+5\}$ con $k \in \mathbb{N}$. Sea 0 un símbolo de constante con la interpretacion usual y f la función $f(x) = x + 1$.

Esta claro que este modelo $\mathcal{M}$ satisface todas las fórmulas de Γ_0 pues es verdad que f tiene al menos k soportes.

La explicación a esto es sencillo: $\mathcal{M}$ cuenta con $k+6$ elementos y, por definición de f, $f(x) \neq 0$ para cualquier x. No obstante, esta a simple vista que los soportes de f en el modelo presentado no son infinitos. En particular, tiene como máximo $k+6$ soportes.